数理解析研究所講究録
460巻 1982年 184-197



# 従属している観測による確率近似法について

福岡大　理学部　渡辺正文

確率近似法は1951年 H. Robbins and S. Monro ([6]) により与えられて以来現在まで，理論，応用両面に関して色々の分野（統計，確率，工学等）の人々により研究が続けられている．確率近似法は統計的構造（先験情報）が良く知られていない系において，ある意味の最適解を求める一つの方法である．また，そのアルゴリズムは逐次的で簡単であるという利点を持つため，応用価値が高い．例えば，学習制御問題においては，パターン分類問題における最適識別関数の学習とか，観測可能な入力と出力の列よりシステムを学習するシステムの同定問題等（[5]）である．これらの問題に確率近似法を適用しようとする時，観測列（学習列）は独立な確率変数列でなければ，直接収束定理を適用出来なかった．観測列が従属確率変数列の場合は従来の確率近似法は適用出来ない．本報告は，従属の場合も適用出来る収束定理を与える．この問題に関して，いくつかの論文（[1]，[3]，[4]，[8]－[10]）があるが，それらの結果は独立の場合に比べるとまだ一般的とはいえない．ここでは，それらを含む様な（完全とはいえぬが）より

一般的な収束定理を与える．収束は a.s.（確率 1）収束と平均収束の両方を考える（§4）．さらに，平均収束の order についても考える（§5）．

## §1 Robbins－Monro 法

$R^N$：$N$ 次元 Euclid 空間，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，ノルム $\|\cdot\|$．

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$：確率空間．以下考える確率変数は全て，この確率空間上で定義されているものとする．

$\{\mathcal{A}_n\}$ ： $\mathcal{A}$ の sub-$\sigma$-fields の列．

$$\mathcal{A}_m^n \overset{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_{m+1}, \cdots, \mathcal{A}_n) .$$

$M(x)$ ： $R^N \to R^N$，$\mathcal{B}^N$－可測変換，ここで，$\mathcal{B}^N$ は $R^N$ の Borel field とする．

$Y_n(x,\omega)$ ： $R^N \times \Omega \to R^N$，$\mathcal{B}^N \times \mathcal{A}_n$－可測 $(n=1,2,\cdots)$，$M(x)$ の $(n, x)$ における観測，分布は未知とする．

この時，方程式 $M(x)=0$ の解 $x=\theta$ を推定する次の Robbins－Monro 法を考える．ここで，$0$ は $R^N$ の零ベクトルを表し，数の零と同じ記法で表す．

$$(1.1)\quad \begin{cases} X_1(\omega) = R^N \text{ の任意の定数ベクトル}, \\ X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) - a_n Y_n(X_n(\omega), \omega), \quad n=1,2,\cdots , \end{cases}$$

ここで，$\{a_n\}$ は単調減少な正の実数列，又は確率変数列で，

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (a.s.) とする．ここで，もしも $\{\mathcal{A}_n\}$ が独立

な列ならば (1.1) は従来の Robbins-Monro 法である．ここでは $\{A_n\}$ が従属の場合を考える．論文[3]，[4]，[8]，[9]においては，$M(x)=Ax+b$，$Y_n(x,\omega)=A_n(\omega)x+b_n(\omega)$，ここで，$A$, $A_n(\omega)$ は行列，$b$, $b_n(\omega)$ はベクトル，の場合を考えている．また，[1]においては $M(x)$ は線形とは限らずより一般的な場合を扱っているが，条件

$$(1.2) \qquad \sup_x \| Y_n(x,\omega)-M(x)\| < \infty \quad \text{a.s.}$$

を仮定している．明らかに，[3]，[4] 等の場合は条件 (1.2) は成立しない．ここでは，(1.2) を仮定しないで，$M(x)$ が一般的な場合を考える．従って，両才の場合を含む様な場合を考えることになる．

## §2 準備

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ : $\mathcal{A}$ の sub-$\sigma$-fields．この時，$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の従属係数を次で定義する ([2])

$$\phi(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2) = \sup_{A\in\mathcal{A}_2} (\operatorname{ess\,sup} |P(A|\mathcal{A}_1)-P(A)|).$$

次の補題2.1，2.2 は [2] の簡単な拡張である．

補題 2.1. $X_i$ $(i=1,2)$ を $R^n$ の値をとる確率変数で $\mathcal{A}_i$-可測 $(i=1,2)$ とする．さらに，$p, q>1$，$1/p+1/q=1$ なる $p, q$ に対し，$E\|X_1\|^p<\infty$，$E\|X_2\|^q<\infty$ とする．このとき，次の不等式が成立する．

$$| E\langle X_1, X_2\rangle - \langle EX_1 , EX_2 \rangle | \leqq 2N\phi^{1/p}(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)\, E^{1/p}\|X_1\|^p E^{1/q}\|X_2\|^q$$

補題 2.2. $\{\mathcal{A}_n\}$ ; $\mathcal{A}$ の sub-σ-fields の列. $\{X_n\}$ を $R^N$ の値をとる確率変数列で各 $n$ に対し, $X_n$ は $\mathcal{A}_n$-可測とする. さらに, $\{k_n\}$ を正の単調減少列で $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$ とする. このとき,

$$\exists n_0 ; \quad \limsup_{n\to\infty} \phi(\mathcal{A}_1^n , \mathcal{A}_{n+n_0}^\infty) < 1 ,$$

$$\sum_{n=1}^\infty \sup_m \phi^{1/2}(\mathcal{A}_m , \mathcal{A}_{m+n}) < \infty$$

$$\sum_{n=1}^\infty k_n^2 E\|X_n - EX_n\|^2 < \infty$$

が成立するならば

$$\lim_{n\to\infty} k_n \Big\| \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \Big\| = 0 \quad \text{a.s.} \quad .$$

補題 2.3. $\{\xi_n\}, \{v_n\}, \{u_n\}$ : 非負実数列. $\{\delta_n\}$ : 正の実数列で $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$. $\exists t$ ; $0 < t \leqq 1$ ,

$$\xi_{n+1} \leqq (1+v_n)\xi_n + u_n(\xi_n^{1-t} + 1) \quad , n=1,2,\cdots ,$$

$$\sum_{n=1}^\infty v_n < \infty \quad , \quad \sum_{n=1}^\infty \delta_n u_n < \infty$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n \xi_n^t = 0 \quad .$$

補題 2.4. $\{U_n\}$ ; 非負の確率変数列, 以下を満たす.

$$EU_1 < \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} U_n = 0 \quad \text{a.s.} ,$$

$$E[U_{n+1} \mid U_1, U_2, \cdots , U_n] \leqq U_n + W_n \quad \text{a.s.} \quad n=1,2,\cdots ,$$

ここで，$\{W_n\}$ は確率変数列で

$$\sum_{n=1}^{\infty} E W_n \quad \text{converges} .$$

このとき，

$$\lim_{n\to\infty} EU_n = 0 .$$

## §3 仮定

方程式 $M(x)=0$ は一意解 $x=\theta$ を持つとする．以下，$\{\delta_n\}$は正の実数列又は正の確率変数列で単調減少とする．$p$は非負整数を表し，$R^{N_0}$ は $N_0$次元 Euclid 空間とし，内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$，ノルムを $\|\cdot\|_0$ で表す．

A 1 ：(1) $\{a_n\}$ が確率変数列のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad \text{on} \quad \sup_n \|X_n\| < \infty .$$

(2) $\{a_n\}$ が実数列のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty .$$

A 2 ： $\sup_n | a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1} | < \infty \quad (a.s.)$

A 3 ： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n < \infty \quad (a.s.)$

A 4 ： $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \quad (a.s.)$

A 5 ： $a_n \delta_n^{-2p-1} > a_{n+1} \delta_{n+1}^{-2p-1} \quad (a.s.)$

B 1 ： $\|M(x)\| \leqq K(\|x-\theta\|+1)$，ここで $K$ は正定数を表す．以下，正定数は全て同じ$K$で表す．

B2 : $\inf_{\varepsilon<\|x-\theta\|<\varepsilon^{-1}} \langle x-\theta,\ M(x)\rangle > 0$ for $\forall\varepsilon>0$.

B3 : $\inf_{\varepsilon<\|x-\theta\|} \langle x-\theta,\ M(x)\rangle > 0$ for $\forall\varepsilon>0$.

B4 : $\langle x-\theta,\ M(x)\rangle \geqq \lambda\|x-\theta\|^2$ for some $\lambda>0$.

C1 : $F(x) : R^N \to R^{N_0}$, Borel 可測変換, $\{G_n(\omega)\} : R^{N_0}$ の値をとる，確率変数列で各 $n$ に対し，$G_n(\omega)$ は $\mathcal{A}_n$ 可測．このとき，次の事が成立，

(1) $\langle x-\theta,\ Y_n(x,\omega)-M(x)\rangle = \langle F(x),\ G_n(\omega)\rangle_0$ for $(x,\omega)\in R^N\times\Omega$, $n=1,2,\cdots$.

(2) $\|F(x)-F(y)\|_0 \leqq K(\|x\|+\|y\|+1)\|x-y\|$ for $x,y\in R^N$.

C2 : $\{\alpha_n(\omega)\}$, $\{\beta_n(\omega)\}$ : 非負の確率変数列，各 $n$ に対し $\alpha_n$, $\beta_n$ は各々 $\mathcal{A}_n$ 可測，さらに，以下を満たす，

$$\|Y_n(x,\omega)-M(x)\| \leqq \alpha_n(\omega)\|x-\theta\| + \beta_n(\omega) \quad \text{for}$$

$(x,\omega)\in R^N\times\Omega$, $n=1,2,\cdots$.

C3 : $\{\gamma_n(\omega)\}$ : 非負の確率変数列，各 $n$ に対し，$\gamma_n$ は $\mathcal{A}_n$ 可測で

$$\langle\theta-x,\ Y_n(x,\omega)\rangle \leqq \gamma_n(\omega)\|x-\theta\| \quad \text{for } (x,\omega)\in R^N\times\Omega,$$

$n=1,2,\cdots$.

C4 : $\max\{\alpha_n(\omega),\beta_n(\omega),\gamma_n(\omega)\} \leqq K(\|G_n(\omega)\|_0+1)$ a.s. for $n=1,2,\cdots$.

C5 : $\sup_n \alpha_n(\omega) \leqq K$ a.s.

C6 : $\sup_n E\|G_n\|_0^{2p+2} < \infty$ .

C7 : $\{a_n\}$, $\{\delta_n\}$ は実数列で,

$$\sup_n a_n \delta_n^{-2p-1} \| \sum_{j=1}^{n} EG_j \|_0 < \infty .$$

D1 : (1) $\exists n_0$; $\limsup_{n\to\infty} \phi(\mathcal{A}_1^n, \mathcal{A}_{n+n_0}^\infty) < 1$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_m \phi^{1/2}(\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_{m+n}) < \infty$.

D2 : $\{a_n\}$, $\{\delta_n\}$ は実数列で,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n^{-2p-1} \varphi^{2p+1/2p+2}(n) < \infty ,\quad ここで$$

$$\varphi(n) = \sup_m \phi(\mathcal{A}_1^m, \mathcal{A}_{m+n}) .$$

注意1. もし, 条件 (1.2) が成立するならば, 仮定 C3 は B2 (又は B3, B4) の成立の下で,

$$\gamma_n(\omega) = \sup_x \| Y_n(x,\omega) - M(x) \|$$

と置くことにより成立する.

注意2. $\{A_n(\omega)\}$ を定常な random matrices の列, $\{b_n(\omega)\}$ を定常な random vectors の列とし, 各 $n$ に対し, $A_n, b_n$ は $\mathcal{A}_n$ 可測とする. さらに, 以下の条件を満たすとする.

$$\langle x,\ xA_n(\omega) \rangle \geq 0 \quad \text{for } (x,\omega) \in R^N \times \Omega ,$$

$$\langle x,\ xA \rangle \geq \lambda \|x\|^2 \quad \text{for some } \lambda > 0 ,$$

ここで, ベクトルは行ベクトルとする. $A = EA_n$, $b = Eb_n$ とする. このとき, 方程式 $xA + b = 0$ は一意解 $\theta = -bA^{-1}$

を持つ．従って，$M(x) = xA + b$，$Y_n(x,\omega) = xA_n(\omega) + b_n(\omega)$，
$\alpha_n(\omega) = \| A_n(\omega) - A \|$，$\beta_n(\omega) = \| b_n(\omega) - b \|$，$\gamma_n(\omega) = \| b_n(\omega) - bA^{-1}A_n(\omega) \|$ とおくと，仮定 C2, C3 が成立する．

一方，$x = (x_1, \cdots, x_N)$，$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_N)$ に対して

$$F(x) = \left( (x_1-\theta_1)^2, \cdots, (x_i-\theta_i)(x_j-\theta_j), \cdots, (x_N-\theta_N)^2, x_1-\theta_1, \cdots, x_N-\theta_N \right)$$

と定義し，$A_n^{(i,j)}(\omega)$，$A^{(i,j)}$ を $A_n(\omega)$，$A$ の第 $(i,j)$-成分とし，$C_n^{(i)}(\omega)$ を $b_n(\omega) - bA^{-1}A_n(\omega)$ $( = b_n(\omega) + \theta A_n(\omega))$ の第 $i$-成分とするとき，

$$G_n(\omega) = \left( A_n^{(1,1)}(\omega) - A^{(1,1)}, \cdots, A_n^{(i,j)}(\omega) - A^{(i,j)}, \cdots, A_n^{(N,N)}(\omega) - A^{(N,N)}, C_n^{(1)}(\omega), \cdots C_n^{(N)}(\omega) \right)$$

と定義すれば，$N_0 = N^2 + N$ として，仮定 C1 が成立する．

## §4 収束定理

この章では a.s. 収束と平均収束に関する定理を与える．定理は §2 の補題と次に与える補題により証明される．

補題 4.1. A2 − A5 $(p=0)$，B1，C1 − C4 が成立．さらに，以下の条件が満たされるとする，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n \| G_n \|_0^2 < \infty \quad \text{a.s.},$$

$$\sup_n a_n \delta_n^{-3} \left\| \sum_{j=1}^{n} G_j \right\|_0 < \infty \quad \text{a.s.}$$

このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle X_n-\theta,\ Y_n - M(X_n)\rangle \quad \text{converges} \quad \text{a.s.} \ .$$

略証） $\theta=0$ としても一般性を失わないので，以下 $\theta=0$ として進める．証明は補題2.3を用いて，$\lim_{n\to\infty} \delta_n \| X_n \| = 0$ a.s. を導き，これを用いて示される．

補題4.2． $r$ を正整数とする．$\{a_n\}$，$\{\delta_n\}$ は実数列とする．さらに，A2 − A5 ($p=r$)，B1，C1 − C7 ($p=r$)，D2 ($p=r$) が成立するならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n E[\|X_n-\theta\|^{2(r-1)} \langle X_n-\theta,\ Y_n - M(X_n)\rangle] \quad \text{converges} .$$

略証） 補題2.3を用いて，$\lim_{n\to\infty} \delta_n^{2q} E\|X_n\|^{2q} = 0$ が示される．ここで，$q$ は $1 \leqq q \leqq r+1$ なる整数．この結果と，補題2.1を用いて示される．

定理4.1． 補題4.1の条件の他に，A1，B2 が成立するならば，

(4.1) $$\lim_{n\to\infty} \|X_n-\theta\|^2 = 0 \quad \text{a.s.} \ .$$

略証） $\theta=0$ として示す．(1.1) より

$$\|X_{n+1}\|^2 \leqq \|X_1\|^2 \prod_{j=1}^{\infty} (1+Kv_j) + \sum_{j=1}^{n} (KV_j - W_j) \prod_{t=j+1}^{n} (1+Kv_t) - \sum_{j=1}^{n} U_j \prod_{t=j+1}^{n} (1+Kv_t) \ ,$$

ここで，

$$v_n = a_n^2(\alpha_n^2+1) \ , \quad V_n = a_n^2(\beta_n^2+1) \ ,$$

$$W_n = 2a_n \langle X_n, Y_n - M(X_n) \rangle, \quad U_n = 2a_n \langle X_n, M(X_n) \rangle .$$

このとき，仮定より $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ a.s.， $\sum_{n=1}^{\infty} V_n < \infty$ a.s. が成立することがわかる．さらに，補題4.1より $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$ はa.s. 収束する．従って，$\sup_n \|X_n\| < \infty$ a.s. 及び $\sum_{n=1}^{\infty} U_n < \infty$ a.s. が成り立つ．故に，A1，B2 より

$$^{\exists}\{X_{n_k}\} \subset \{X_n\} \; ; \quad \lim_{k\to\infty} \|X_{n_k}\| = 0 \quad a.s..$$

一方，$\lim_{n,m\to\infty} \left| \|X_n\|^2 - \|X_m\|^2 \right| = 0$ a.s. が示されて，(4.1) が成立する．

<u>系 4.1.</u> $\{a_n\}$，$\{\delta_n\}$ を実数列とする．A1－A5 $(p=3)$，B1－B2，C1－C4，C6 $(p=0)$，C7 $(p=1)$，D1 が成立するならば (4.1) が成立する．

証明） $a_n^2\delta_n^{-6} = (a_n\delta_n)(a_n\delta_n^{-7})$ に注意して，次の結果を得る．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \delta_n^{-6} E\|G_n\|_0^2 < \infty .$$

従って，補題 2.2 と C7 $(p=1)$ より $\sup_n a_n\delta_n^{-3} \|\sum_{j=1}^{n} G_j\|_0 < \infty$ a.s. が導びかれる．よって，定理 4.1 より結論を得る．

<u>定理 4.2.</u> 補題 4.2 の条件の他に，A1，B3 が成立するならば

$$(4.2) \qquad \lim_{n\to\infty} E\|X_n - \theta\|^{2r} = 0 .$$

略証） $\theta = 0$ とする．(4.1) より，次式を得る．

$$\|X_{n+1}\|^{2r} \leqq (1+Ka_n^2)\|X_n\|^{2r} - 2ra_n\|X_n\|^{2(r-1)}\langle X_n, Y_n\rangle$$
$$+ Ka_n^2 \sum_{k=1}^{r} \|X_n\|^{2(r-k)}\|Y_n\|^{2k}.$$

Hölder の不等式と A4, A5 $(p=r)$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{k=1}^{r} E\|X_n\|^{2(r-k)}\|Y_n\|^{2k} < \infty .$$

定理 4.1 の証明と同様の方法を用いて，補題 4.2 より

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n E[\|X_n\|^{2(r-1)}\langle X_n, M(X_n)\rangle] < \infty$$

を得る．従って，A1, B3 より次の事が成立する，

$$\exists \{X_{n_k}\} \subset \{X_n\} \;;\quad \lim_{k\to\infty}\|X_{n_k}\| = 0 \quad a.s. .$$

次に，$Z_k = \|X_{n_k}\|^{2r}\prod_{t=n_k}^{\infty}(1+Ka_t^2)$ とおくと，

$$Z_{k+1} \leqq Z_k + \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} W_j \prod_{t=j+1}^{\infty}(1+Ka_t),$$

ここで，

$$W_j = -2ra_j\|X_j\|^{2(r-1)}\langle X_j, Y_j\rangle + Ka_j^2\sum_{k=1}^{r}\|X_j\|^{2(r-k)}\|Y_j\|^{2k}.$$

$\lim_{k\to\infty} Z_k = 0$ a.s. が成立することに注意し，補題 2.4 を用いると，$\lim_{k\to\infty} E\|X_{n_k}\|^{2r} = 0$ を得る．一方，

$$\lim_{n,m\to\infty} |E\|X_n\|^{2r} - E\|X_m\|^{2r}| = 0$$

が成立することより，(4.2) が示される．

<u>注意.</u> 仮定 B3 の代りに，より弱い条件 B2 が成立する場合も平均収束がいえる．すなわち，A1−A5 $(p=\max\{3, r\})$, B1−B2, C1−C7 $(p=r)$, D1−D2 $(p=r)$ が成立するならば，(4.1) 及び (4.2) が成立．証明は系 4.1，補題 2.4 を用

いて，定理 4.2 と同様の方法で出来る.

## §5　平均収束の order

この章では，アルゴリズム (1.1) において，$a_n = an^{-1}$ とした時の平均収束の order を考える．また，$M(x)$ の条件は一番強い条件 B4 を仮定する.

定理 5.1.　$r$ を正整数とする．B1, B4, C1–C6 ($p=r+1$)，さらに，以下の条件を仮定する，

$$a_n = an^{-1} \quad (n \geqq 1) \quad \text{with} \quad a>0,\ 2a\lambda > 1,$$

$$\| E\, G_n \|_0 = 0 \quad \text{for} \quad n=1,2,\cdots,$$

$$\varphi(n) \leqq K n^{-b} \quad (n \geqq 1) \quad \text{with} \quad b>0 .$$

このとき，次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} E\,\|X_n-\theta\|^{2r} &\leqq K n^{-\alpha} \log n && \text{if} \quad 0<\alpha \leqq 1, \\ &\leqq K n^{-1} && \text{if} \quad 1<\alpha, \end{aligned}$$

ここで，$\alpha = b(2r+1)(2r+2)^{-1}$.

略証）$\theta = 0$ として示す．$\delta_n = n^{-\delta}$, $0<\delta<\min\{(2r+3)^{-1}, \alpha(2r+3)^{-1}\}$ とすると，$p=r+1$ として，定理 4.2 の条件が満たされる．従って，$\lim_{n\to\infty} E\,\|X_n\|^{2r+2} = 0$ が成立．これを用いて，

$$E\,\|X_{n+1}\|^{2r} \leqq \{1-2(1-\varepsilon)\lambda a n^{-1}\}\, E\,\|X_n\|^{2r} + K n^{-2} + K n^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} j^{-1} (n-j)^{-\alpha}$$

$(n \geqq 1)$ が示される．ここで，$\varepsilon > 0$ は $2(1-\varepsilon)\lambda a > 1$ を

満たす様にとっておく.

$0<\alpha\leqq 1$ のとき,

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^{-1}(n-j)^{-\alpha} \leqq K n^{-\alpha}\log n \qquad (n\geqq 1)$$

$1<\alpha$ のとき,

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^{-1}(n-j)^{-\alpha} \leqq K n^{-1} \qquad (n\geqq 1)$$

なることを用いて結論を得る.

## 参考文献


〔1〕 Borodin, A.N. : A stochastic approximation procedure in the case of weakly dependent observations. Theory. Prob. Appl. 24, 34-52 (1979).

〔2〕 Iositescu, M. and Theodorescu, R. : Random Processes and Learning. Springer 1969.

〔3〕 Fritz, J. : Learning from an ergodic training sequence. In Limit Theorems of Probability Theory ; ed. P. Révész, North-Holland, 79-91 (1974).

〔4〕 Györfi, L. : Stochastic approximation from ergodic sample for linear regression. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 54, 47-55 (1980).

〔5〕 Mendel, J.M. and Fu, K.S. : Addaptive, learning and pattern recogntion system, Theory and applications. Academic Press, 1970.

[6] Robbins, H and Monro, S.: A stochastic approximation method. Ann. Math. Statist. 22, 400-407 (1951).

[7] Wasan, M. T.: Stochastic Approximation, Cambridge Univ. Press, 1969.

[8] Watanabe, M.: On Robbins-Monro procedure with a sequence of dependent random variables. Fukuoka Univ. Sci. Reports, 7, No. 1, 21-33 (1977).

[9] Watanabe, M.: An almost sure convergence theorem in a stochastic approximation method with dependent random variables. Bull. Math. Statist., 18, No. 3-4, 95-112 (1979).

[10] Watanabe, M.: A stochastic approximation with a sequence of dependent random variables. Bull. Math. Statist., 19, No. 3-4, 25-42 (1981).